FUNKCJA KWADRATOWA

Zadanie 12. (4 *pkt*)
Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja:
$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$
ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

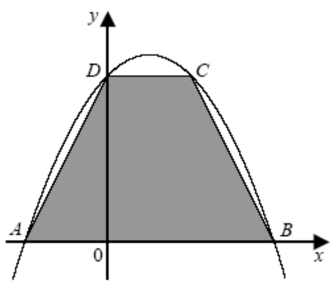
Zadanie 19. (*10 pkt*)
Dane jest równanie: $x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.
Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

Zadanie 11. (*6 pkt*)
Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem $f(m) = x_1 \cdot x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $(m+2)x^2 - (m+2)^2 x + 3m + 2 = 0$, w którym $m \in R \setminus \{-2\}$.

Zadanie 11. (*6 pkt*)
Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których funkcja $f(x) = x^2 - 2^k \cdot x + 2^k + \frac{5}{4}$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in R$.

Zadanie 5. (*3 pkt*)
Sporządź wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości x, dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x, dla których przyjmuje minima lokalne.

Zadanie 6. (*4 pkt*)
Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest zawarta w osi Ox, wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$ z osią Oy. Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



Zadanie 11. *(3 pkt)*
Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej $n > 1$ największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$ o niewiadomej x. Wyznacz wzór funkcji f.

Zadanie 5. (*7 pkt*)
Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi Ox. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

LOGARYTMY I WYKŁADNICZA

Zadanie 13. (*6 pkt*)
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których każda liczba spełniająca równanie:
$$\log_m^2(x-1) + \log_m(x-1) - 2 = 0$$
jest mniejsza od 3.

Zadanie 11. *(3 pkt)*
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Zadanie 13. (*5 pkt*)
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_x\left(4^x - 12 \cdot 2^x + 32\right)$.

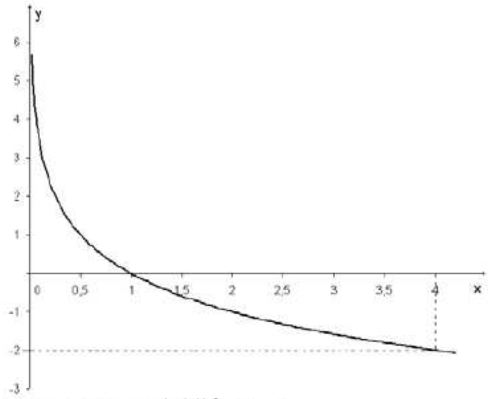
Zadanie 20. (*4 pkt*)
Dane są funkcje $f(x) = 3^{x^2-5x}$ i $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$.
Oblicz, dla których argumentów x wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

Zadanie 2. (*5 pkt*)

Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-1\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(5-x\right)>\log_{\frac{1}{3}}\left(3\left(x+1\right)\right)$.

Zadanie 3. (*4 pkt*)

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej f.



Rozwiąż równanie $\left(f(x)\right)^2-16=0$.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

Zadanie 14. (*3 pkt*)

Wykaż, że jeśli $a \neq b$, to równanie: $x^2+y^2+ax+by+\frac{a \cdot b}{2}=0$ jest równaniem okręgu.

Wyznacz współrzędne środka i długość promienia tego okręgu.

Zadanie 18. (*8 pkt*)

Pary liczb (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2+y^2+2y+1=0 \\ -x^2+y+4=0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$.

a) Wyznacz współrzędne punktów: A, B, C, D.
b) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.
c) Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

Zadanie 18. (*8 pkt*)

Punkty $A=(7,8)$ i $B=(-1,2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, w którym $|\sphericalangle BCA|=90^0$.

a) Wyznacz współrzędne wierzchołka C, wiedząc, że leży on na osi OX.
b) Napisz równanie obrazu okręgu opisanego na trójkącie ABC w jednokładności o środku w punkcie $P=(1,0)$ i skali $k=-2$.

TRYGONOMETRIA

Zadanie 15. (*4 pkt*)

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem:

$$f(x)=\sin 2x+\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right).$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12. (*4 pkt*)

Dana jest funkcja: $f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x, \quad x \in R$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.
b) Rozwiąż równanie: $f(x)=1$.

Zadanie 15. (*4 pkt*)

Rozwiąż równanie: $\frac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg} x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

Zadanie 16. (*7 pkt*)

Dane jest równanie postaci $(\cos x-1)\cdot(\cos x+p+1)=0$, gdzie $p \in R$ jest parametrem.

a) Dla $p=-1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0;5\rangle$.
b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi;\pi\rangle$ trzy różne rozwiązania.

Zadanie 14. (*4 pkt*)

a) Naszkicuj wykres funkcji $y=\sin 2x$ w przedziale $<-2\pi, 2\pi>$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$

i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

Zadanie 7. (*3 pkt*)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x = \cos x$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 8. *(3 pkt)*

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ dla $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

PLANIMETRIA

Zadanie 17. (*5 pkt*)

Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta i oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka tego kąta.
b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

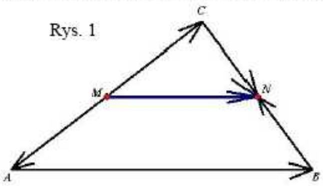
Zadanie 4. (*7 pkt*)

Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$ i $|\sphericalangle CAB| = 30^\circ$, jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Wykonaj odpowiedni rysunek.

Zadanie 15. (*4 pkt*)

W dowolnym trójkącie ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC (Rys. 1).

Rys. 1



Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem:

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ (1)

oraz

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$ (2)

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$

Ponieważ $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$, więc:

$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$

$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$

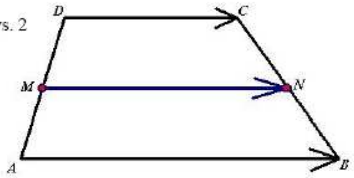
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco:

odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek pomiędzy wektorem $\overrightarrow{MN}$ oraz wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest dowolnym trapezem, zaś punkty M i N są odpowiednio środkami ramion AD i BC tego trapezu (Rys. 2).

Rys. 2



Podaj interpretację otrzymanego wyniku.

Zadanie 17. (*4 pkt*)

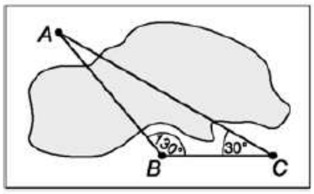
W trójkącie prostokątnym ABC ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$) dane są długości przyprostokątnych: $|BC| = a$ i $|CA| = b$. Dwusieczna kąta prostego tego trójkąta przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D. Wykaż, że długość odcinka CD jest równa $\frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \sqrt{2}$. Sporządź pomocniczy rysunek uwzględniając podane oznaczenia.

Zadanie 18. (*8 pkt*)

Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$, wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokąta ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się $\frac{3}{8}$.

Zadanie 16. (*3 pkt*)

Obiekty A i B leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami B i C jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami A i B i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



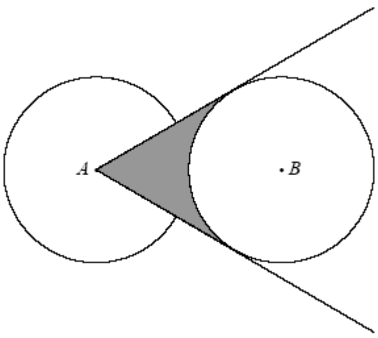
Zadanie 17. (*6 pkt*)

Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$.

a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.
b) Oblicz cosinus $|\sphericalangle CBD|$.

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Dwa okręgi, każdy o promieniu 8, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole zacieniowanej figury (patrz rysunek).



Zadanie 4. (*3 pkt*)

Dany jest trójkąt o bokach długości 1, $\frac{3}{2}$, 2. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

Zadanie 10. (*4 pkt*)

Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

STEREOMETRIA

Zadanie 18. (*6 pkt*)

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu 9 dm^2. Dwie ściany boczne ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{6}$.

a) Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz na nim dane kąty.
b) Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 16. (*5 pkt*)

Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 19. (*6 pkt*)
Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy jest równa a. Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę 45°. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz otrzymany przekrój. Oblicz pole tego przekroju.

Zadanie 3. (*5 pkt*)
Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Zadanie 19. (*5 pkt*)
W pierwszej loterii jest n ($n > 2$) losów, w tym jeden los wygrywający. W drugiej loterii $2n$ losów, w tym dwa wygrywające. W której z loterii należy kupić dwa losy, aby mieć większą szansę wygranej ? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 13. (*4 pkt*)

Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.

Zadanie 16. (*4 pkt*)
Para (Ω, P) jest przestrzenią probabilistyczną, a $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są zdarzeniami niezależnymi. Wykaż, że jeżeli $P(A \cup B) = 1$, to jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym tj. $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

Zadanie 14. (*4 pkt*)

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi, takimi że $P(A) = \frac{5}{12}$ oraz $P(B) = \frac{7}{11}$.
Zbadaj, czy zdarzenia A i B są rozłączne.

Zadanie 15. (*4 pkt*)
Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

Zadanie 9. (*3 pkt*)

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi. Mając dane prawdopodobieństwa zdarzeń: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ i $P(A \setminus B) = 0,3$, zbadaj, czy A i B są zdarzeniami niezależnymi.

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Niech A, B będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,85$ i $P(B) = 0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geq 0,8$.

CIĄGI

Zadanie 20. (*7 pkt*)
Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczbą mniejszą od 1. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}}$ wiedząc, że $a_{51} = 1$.

Zadanie 14. (*5 pkt*)

Oblicz: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + ... + (2n + 3)}$.

Zadanie 14. (*4 pkt*)
Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a $(a > 0)$.

Zadanie 20. (4 *pkt*)

Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{dla} \quad \text{dowolnego} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Wykaż, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że ciąg (a_n) można określić za pomocą wzoru ogólnego $a_n = \dfrac{2}{2n-1}$, gdzie $n \geq 1$.

Zadanie 15. (5 *pkt*)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny postaci: $2, \dfrac{2}{p-1}, \dfrac{2}{(p-1)^2}, \dfrac{2}{(p-1)^3}, \ldots$.

Wyznacz wszystkie wartości p, dla których granicą tego ciągu jest liczba:

a) 0.

b) 2.

Zadanie 19. (6 *pkt*)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnij, że każda liczba naturalna $n \geq 5$ spełnia nierówność $2^n > n^2 + n - 1$.

Zadanie 12. (5 *pkt*)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwy jest wzór: $1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \cdots + n(n+2)(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$.

Zadanie 19. (7 *pkt*)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k-2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru *k*, dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n).

Zadanie 2. (5 *pkt*)

Wyznacz wszystkie wartości $k \in R$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$ są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

Zadanie 10. (5 *pkt*)

Ciąg liczbowy (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = (n-3)(2-p^2)$, gdzie $p \in R$.

a) Wykaż, że dla każdej wartości p ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

b) Dla $p = 2$ oblicz sumę $a_{20} + a_{21} + a_{22} \ldots + a_{40}$.

c) Wyznacz wszystkie wartości p, dla których ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n - pn$ jest stały.

Zadanie 11. (*4 pkt)*

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$.

a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{100}$.

b) Oblicz $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S_n}{3n^2 - 2}$.

WIELOMIANY

Zadanie 21. (5 *pkt*)

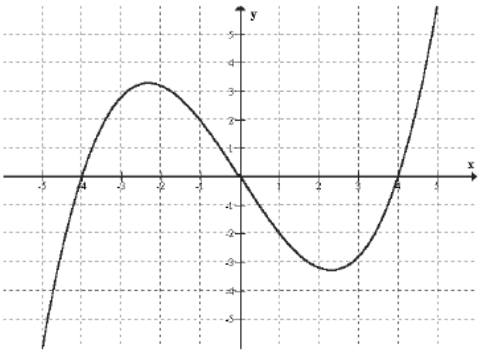
Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste spełniające równanie: $(5-x)^{x^3 - 4x^2 + x + 6} = 1$.

Zadanie 9. (3 *pkt*)

Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

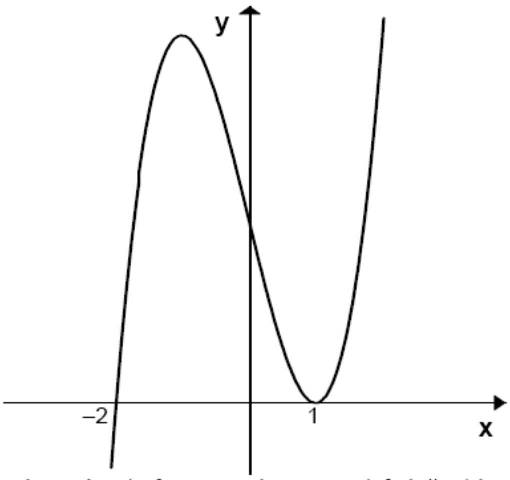
POCHODNA FUNKCJI

Zadanie 17. (*5 pkt*)
Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji *f*.



a) Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.
b) Wyznacz wartość x, dla której funkcja f osiąga maksimum lokalne. Odpowiedź uzasadnij.
c) Wiedząc, że punkt $A = (1, 2)$ należy do wykresu funkcji f, napisz równanie stycznej do krzywej f w punkcie A.

Zadanie 12. (*5 pkt*)



Powyższy rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej $W(x)$ stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1, a pochodna $W'(-2) = 18$.
a) Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$.
b) Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.

Zadanie 18. (*7 pkt*)
Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej $2\ \text{m}^3$ istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

Zadanie 21. (*5 pkt*)
W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja f ma następujące własności:
– jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
– f jest funkcją nieparzystą,
– f jest funkcją ciągłą
oraz:
$f'(x) < 0$ dla $x \in (-8, -3)$,
$f'(x) > 0$ dla $x \in (-3, -1)$,
$f'(x) < 0$ dla $x \in (-1, 0)$,
$f'(-3) = f'(-1) = 0$,
$f(-8) = 0$,
$f(-3) = -2$,
$f(-2) = 0$,
$f(-1) = 1$.
W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8 \rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.

Zadanie 8. (*4 pkt*)

Uczeń analizował własności funkcji *f*, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i która ma pochodną $f'(x)$ dla każdego $x \in R$. Wyniki tej analizy zapisał w tabeli.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	0	$(-)$	0	$(-)$
$f(x)$		2		-1		1	

Niestety, wpisując znaki pochodnej, popełnił jeden błąd.

a) Przekreśl błędnie wpisany znak pochodnej i wstaw obok prawidłowy.

b) Napisz, czy po poprawieniu błędu w tabeli, zawarte w niej dane pozwolą określić dokładną liczbę miejsc zerowych funkcji f. Uzasadniając swoją odpowiedź możesz naszkicować przykładowe wykresy funkcji.

WYMIERNA

Zadanie 13. (*5 pkt*)

Sporządź wykres funkcji $f(x)=\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|=k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Zadanie 13. (*5 pkt*)

Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n=\frac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \ge 1$.

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \le a_n \le b$.

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Funkcja homograficzna f jest określona wzorem $f(x)=\frac{px-3}{x-p}$, gdzie $p \in R$ jest parametrem i $|p| \ne \sqrt{3}$.

a) Dla $p=1$ zapisz wzór funkcji w postaci $f(x)=k+\frac{m}{x-1}$, gdzie k oraz m są liczbami rzeczywistymi.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których w przedziale $(p,+\infty)$ funkcja f jest malejąca.

INNE

Zadanie 16. (*5 pkt*)

W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj figurę *F*, gdzie:

$$F=\{(x;y): x \in R \wedge y \in R \wedge 3|x|+|y| \le 2\}.$$

Oblicz pole figury *F*.

Zadanie 17. (*7 pkt*)

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 12. (*4 pkt*)

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} |x|-y=1 \\ x^2+(y+1)^2=8 \end{cases}$$

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Dana jest funkcja $f(x)=|x-1|-|x+2|$ dla $x \in R$.

a) Wyznacz zbiór wartości funkcji *f* dla $x \in (-\infty,-2)$.

b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

c) Podaj jej miejsca zerowe.

d) Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $f(x)=m$ nie ma rozwiązania.

Zadanie 7. (*7 pkt*)

Dany jest układ równań: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$.

Dla każdej wartości parametru m wyznacz parę liczb (x, y), która jest rozwiązaniem tego układu równań. Wyznacz najmniejszą wartość sumy $x + y$ dla $m \in \langle 2, 4 \rangle$.